Hledáme stac. body funkcionálu

$$F(y) = \int_0^1 y + y' + yy' + \frac{(y')^2}{2} \quad \left(\text{resp. } \int_0^2 \text{ v DÚ 3}\right)$$

Máme $f(x,y,z) = y + z + yz + \frac{z^2}{2}$

Tedy $f_y = 1 + z \quad f_z = 1 + y + z$

Euler-Lagrangeova rovnice má tedy tvar

$$1 + y' - [1 + y + y']' = 0 \quad \longrightarrow \quad 1 + y' - y' - y'' = 0$$

Řešíme tedy rovnici $y'' = 1$

Obecné řešení má tvar $y = \underbrace{Ax + B}_{y_h} + \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{y_p}$

DÚ2: okrajové podmínky $y(0) = y(1) = 0$

$$0 = y(0) = B \rightarrow B = 0$$

$$0 = y(1) = A + B + \frac{1}{2} = A + \frac{1}{2} \rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

Jediným stacionárním bodem je $y = \frac{1}{2}(x^2 - x)$

DÚ 3 okrajové podmínky $y(0)=-2$ $y(2)=2$

$$-2=y(0)=B \rightarrow B=-2$$

$$2=y(2)=2A+B+2 \rightarrow A=1$$

Jediným stac. bodem je tedy $y=x-2+\frac{x^2}{2}$

Položme $g(y,z)=f(x,y,z)=y+z+yz+\frac{z^2}{2}$

Potom $H_g=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, což je indefinitní matice.

Sestavíme Jacobiho rovnici $(f_{zz}=1>0)$.

$$Q=0-(1)'=0 \qquad P=1$$

Rovnice má tvar $h''=0$

Její obecné řešení je $h=Ax+B$.

$$0=h(0)=B \rightarrow B=0$$

$$0=h(x)\overset{\swarrow x\in(0,2]}{}=xA \rightarrow \begin{cases} x=0\notin(0,2] \\ A=0 \text{ triviální řešení} \end{cases}$$

Bod 0 tedy nemá v $(0,2]$ konjugovaný bod,

$y = x - 2 + \frac{x^2}{2}$ je tedy bodem (lokálního) minima.